Die Kettenlinie

Schriftliche Ausarbeitung

Von:

Name:	Asdren Gashi
e-Mail:	asdren@gmx.de
Gruppe:	IFB2A

und

Name:	Christof Franke
e-Mail:	c.franke@muenchen-mail.de
Gruppe:	IFB2A

Institut:

Fachhochschule Mnchen
Fakultät für Mathematik & Informatik
Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Edda Eich-Söllner

SS 2007
Stand: 3. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
1.1 Leibniz 4
1.2 Der Weg zur Formel 4

2 Vorkenntnisse die für die Herleitung benötigt werden **6**
2.1 Was ist eine Differenialgleichung? 6
2.2 Vorraussetzungen 7

3 Herleitung der Kettenlinie (Seil unter Eigengewicht) **8**
3.1 Das Eigengewicht der Kette 8
3.2 Kräfte die an der Seilekurve wirken 8
3.2.1 Kräfte im tiefsten Punkt 10
3.3 Aufstellen der Differentialgleichung der Kettenlinie 10
3.4 Lösen der Differntialgleichung mit Mathemitca 11

4 Eigenschaften der Funktion **12**
4.1 $Cosh(\alpha)$ 12
4.2 Kettenlinie 13
4.2.1 Randbedingungen(Integrationskonstanten) 13
4.2.2 Auswirkung der Konstanten a 15
4.2.3 Welche Rolle spielt die Lage der Aufhängepunkte? . . . 16
4.2.4 Bestimmung des Faktors $a = \frac{q}{h}$ 17
4.2.5 Welche Rolle spielt das Gewicht der Kette? 18
4.2.6 Annäherung durch Taylor Reihe 19

5 Parbale vs Kettenlinie **20**
5.1 Beweis: Kettenlinie ist keine Parabel! 20
5.2 Seil unter konstanter Linienlast 22

6 Anwendungsbeispiele **23**
6.1 Brücken 24
6.2 Bögen 25
6.3 Hochspannungsleitungen 26

1 Einleitung

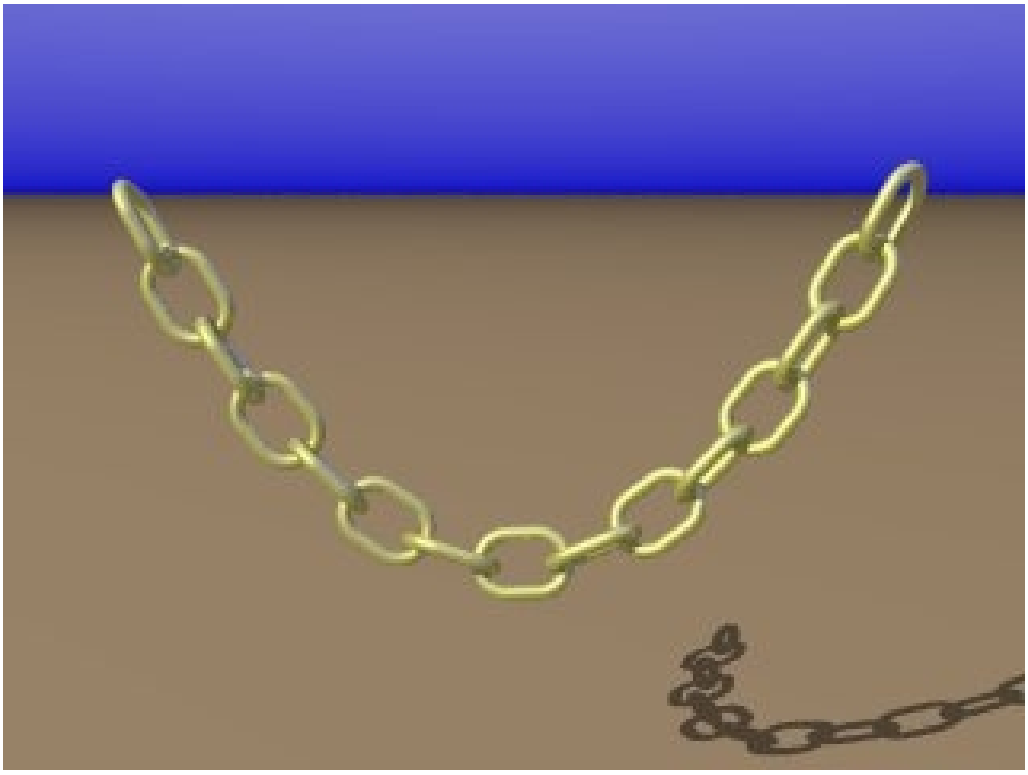

Abbildung 1: Die Kettenlinie

Als Kettenlinie oder Seilkurve bezeichnet man die Kurve einer Kette die nur durch ihr Eigengewicht belastet ist. Da aus mechanischer Sicht kein prinzipieller Unterschied zwischen einem Seil und einer Kette besteht wird im folgenden nur noch von Ketten gesprochen, dies gilt aber auch für Seile.

1.1 Leibniz

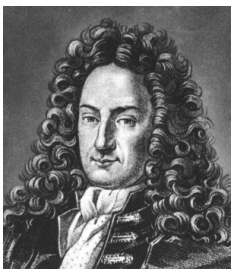

Abbildung 2: Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz

Leibniz wurde am 21. Juni 1646 in Leipzig geboren, studierte 1661-66 in Leipzig und Jena und promovierte mit seiner Dissertatio de arte combinatoria in Altdorf.

Sein Vater war Jurist und Professor für Moralphilosophie und seine Mutter Tochter eines Rechtswissenschaftlers. In der Mathematik taucht der Name Leibniz in etliche Büchern auf, dennoch kann man ihn nicht einfach in die Schublade der reinen Mathematiker stecken, denn außer Mathematiker war er ebenfalls Jurist, Naturwissenschaftler, Politiker, Philosoph, Historiker, Theologe und Diplomat. Er wird auch oft als der letzte Universalgelehrte bezeichnet. Eine bahnbrechende Entdeckung für die Mathematik machte er, durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Weiterhin war er unter anderem an der Entdeckung der binären Zahlen und Herleitung der Kettenlinie beteiligt.[1]

1.2 Der Weg zur Formel

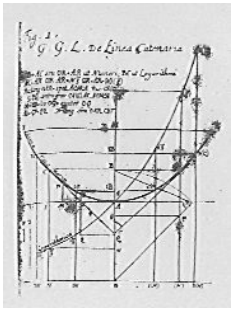

Abbildung 3: Skizze der Kettenlinie

Mit dem Problem der Ketten befasste sich zum Ersten mal der italienische Mathematiker, Physiker und Astronom Galileo im 16 Jahrhundert. Die Parabel ähnliche Form aber täuschte ihn, was dazu führte, dass er eine fehlerhafte Herleitung veröffentlichtete. Für mehrere Jahrzehnte galt die Kettenlinie als Parabel, erst im Jahre 1664 erlangte die Kettenlinie neue Aktualität.

Der erst 17 Jahre alte Hygens erkannte anhand der geometrischen Eigenschaften, die die Kettenkurve aufwies, dass es unmöglich eine Parabel sein kann, sondern schon eher einen Exponentialverlauf annahm. Doch für die Herleitung fehlten ihn noch Kenntnisse der erst kurz zuvor von Leibniz entdeckten Infinitesimalrechnung. Also schrieb er ein Brief an Leibniz, mit dem Vorschlag er könne doch seine neue Entdeckung gleich an der Kettenkurve demonstrieren. Leibniz nahm auch diese Herausforderung an und leitete im Jahre 1690 die exakte Beschreibung der Kettenkurve mit Hilfe ihrer physikalischen Gegebenheiten her. Da aber zu dieser Zeit "Quelllcode Klau" gang und gebe war und er sich der Richtigkeit nicht sicher war, hielt Leibniz seine Herleitung zurück und rief zu einem Wettbewerb aus, bei dem es darum ging, eine Herleitung der Kettenlinie zu finden. Die einzigen Einsendungen, die er bekam waren von

Bernoulli und Hygens, die ebenfalls eine vollständige mathematisch richtige Lösung aufboten.[1]

2 Vorkenntnisse die für die Herleitung benötigt werden

2.1 Was ist eine Differenialgleichung?

Im folgenden wird nur kurz darauf eingegangen was die Differntialgleichung im allgemeinen ist. Das Lösen einer solchen Gleichung ist alles andere als trivial, deshalb nutzen wir dazu das Computeralgebrasystem Mathematica.

Mit der Differentialgleichung ist eine Vielzahl von Phänonemen in der Natur und Technik zu beschreiben.
Beispiele [2]:

- in der Physik verschiedene Arten von Bewegungen, von Schwingungen oder das Belastungsverhalten von Bauteilen,
- in der Astronomie die Bahnen der Himmelskörper und die Turbulenzen im Innern der Sonne,
- in der Biologie etwa Prozesse bei Wachstum, bei Ströhmungen oder in Muskeln und
- in der Chemie die Reaktionskinetik von Reaktionen.

Für das Lösen einer Differentialgleichung gibt es kein einheitliches Verfahren. Ein mögliches Verfahren ist das Euelerverfahren, dessen Funktionsweise uns hier nicht zu interessieren braucht.

Ein kurzes Beispiel für eine Differentialgleichung:

$$y(x) = -y'(x)$$

Die Ausgangsfunktion ist gleich dessen negative Ersteableitung. Die gesuchte Funktion $y(x)$ lautet:

$$y(x) = e^{-x}$$

2.2 Vorraussetzungen

- Ketten können nur Zugkräfte übertragen und gegen Druck, Biegung und Schub keinen Widerstand aufbringen. Sie werden daher als **biegeschlaff** bezeichnet.

- In der Statik betrachtet man Ketten als **dehnstarr**, das heißt ihre Länge bleibt auch bei Last konstant.

- Bei Belastung durch das Eigengewicht krümmt sich das Seil, so dass sich **Gleichgewicht** zwischen der stets tangential zur Seilachse wirkenden Seilkraft und der äußeren Belastung einstellt.

- Die Kette muss sich in Ruhelage befinden damit sich die Kräfte im Gleichgewicht befinden.

[4]

3 Herleitung der Kettenlinie (Seil unter Eigengewicht)

3.1 Das Eigengewicht der Kette

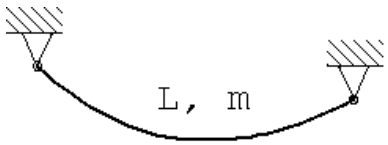

Abbildung 4: Kette mit Länge L und Masse m.

Vereinfacht ist das Gewicht der Kette abhängig von deren Masse m und deren Länge L. Die Gewichtskraft pro Lngeneinheit q (spezifisches Gewicht) ist definiert durch: [5]

$$q = \frac{m * g}{L}$$

3.2 Kräfte die an der Seilekurve wirken

Um die Kettenlinie herzuleiten muss man sich die physikalischen Gegebenheiten zu Hilfe nehmen. Die genaue Berechnung der einzelnen Kräfte ist zwar für die Herleitung an sich unwesentlich, werden jedoch der Vollständigkeit halber aufgefürht. Ketten können nur Zugkräfte übertragen und gegen Druck, Biegung und Schub keinen Widerstand aufrbingen. Bei der Belastung eines befestigten Seils gibt das Seil solange nach bis nur noch Zugkräfte auftreten. Die Seilkräfte verlaufen somit tangential zur Seilkurve. Diese lässt sich in die Komponenten Horizontalkraft H und Vertikalkraft V aufspalten.

$$V = T \sin \alpha \tag{3.1}$$
$$H = T \cos \alpha \tag{3.2}$$

Mit Hilfe des Satz von Pythagoras lässt sich die Tangentialkraft(Zugkraft/Seilkraft) berechnen:

$$\begin{aligned} T^2 &= H^2 + V^2 \\ T &= H\sqrt{1 + (\frac{V}{H})^2} \\ T &= H\sqrt{1 + y'(x)^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

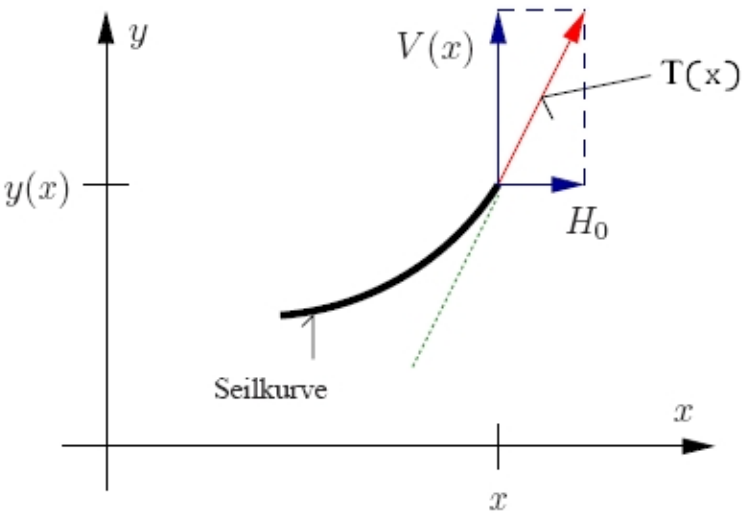

Abbildung 5: Kraftbeziehung an der Kette.

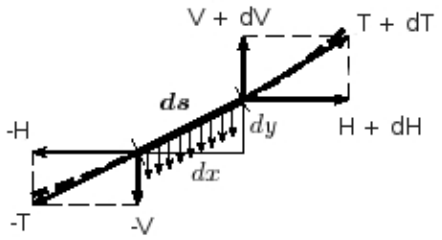

Abbildung 6: Kraftbeziehung an einem differentiell kleinen Stück.

Die Horizontalkraft ist gleich der Seilspannung. Diese kommt durch die beiden Aufhängepunkte zustande. Diese 'ziehen' die Kette nach außen. Da die Seilspannung aus dem Eigengewicht der Kette und der Lage der Aufhängepunkte resultiert und diese beiden Größen konstant sind, muss auch die Horizontalkraft konstant sein. Betrachtet man das differntiell kleine Element ds so folgt aus der Gleichgewichtsbedingung (siehe 2.2): [9]

$$\begin{aligned} -H + H + dH &= 0 \\ H &= konst \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Vertikalkraft der Kette dagegen ist keine konstante Kraft, sie ist im Grunde nichts anderes als das Gewicht, das die Kette nach unten zerrt. Also je höher man entlang der Kette geht, desto mehr Gewicht zieht an diesem Punkt nach unten, weil das Reststück der Kette ebenfalls nach unten wirkt, dementsprechend steigt dann auch die Vertikalkraft.

$$V(x) = q * s(x) \tag{3.5}$$

[9] [7]

3.2.1 Kräfte im tiefsten Punkt

Betrachtet man die Kräfte im tiefsten Punkt so stellt man fest, dass die Vertikalkraft null ist (siehe Gleichung 3.1). Die Horizontalkraft ist gleich der Tangentialkraft(siehe Gleichung 3.2). Die Verikalkraft wird immer kleiner und die Horizontalkraft nähert sich der Tangentialkraft immer mehr an, um so näher man dem tiefsten Punkt kommt.

3.3 Aufstellen der Differentialgleichung der Kettenlinie

Wir kennen nun bereits die Kräfte die an der Kettenlinie wirken, nun muss noch eine Beziehung zwischen diesen Kräften und der Funktion selbst hergestellt werden. Man betrachte die Steigung in einem beliebigen Punkt:

$$\tan\alpha = \frac{V}{H} = \frac{dy}{dx} = y(x)' \tag{3.6}$$

Nun möchten wir noch eine Beziehung zwischen der Länge der Kurve und der Funktion selbst herstellen. Betrachten wir noch einmal die Vertikalkraft, sie ist nichts anders als das Gewicht pro Längeneinheit multipliziert mit der Länge des betrachteten Bogens.

$$V(x) = q * s(x) \tag{3.7}$$

Schneidet man nun ein infinitesimental kleines Stück aus der Kette raus (siehe Abb. 5), so kann dieses als Gerade betrachtet werden und man kann dessen Länge über den Phythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ ds^2 &= dx^2 + dx^2(\frac{dy}{dy})^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ds &= dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} \\
s(x) &= \int_a^b \sqrt{1+\dot{y(x)}^2}dx
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Betrachtet man nun noch mal die hergeleiteten Gleichungen (3.6, 3.7, 3.8) so lassen sich diese zur gesuchten Differentialgleichung umformen:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{V}{H} \\
y'(x) &= \frac{q}{H} * s(x) \\
y''(x) &= \frac{q}{H} * s'(x) \\
y''(x) &= \frac{q}{H} * \sqrt{1+y'(x)^2}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

[6] [7]

3.4 Lösen der Differntialgleichung mit Mathemitca

Eine Möglickeit diese Differentialgleichung zu lösen wäre das Eulerverfahren. Wir bedienen uns hier wieder Mathematica:

```
Clear[y, a, x]
DSolve[y''[x] == 1/a * Sqrt[1 + (y'[x])^2], y[x], x] // Simplify
```

```
{{y[x] → C[2] + a Cosh[x/a + C[1]]}}
```

Abbildung 7: Befehl zum lösen der Gleichung.

4 Eigenschaften der Funktion

4.1 $Cosh(\alpha)$

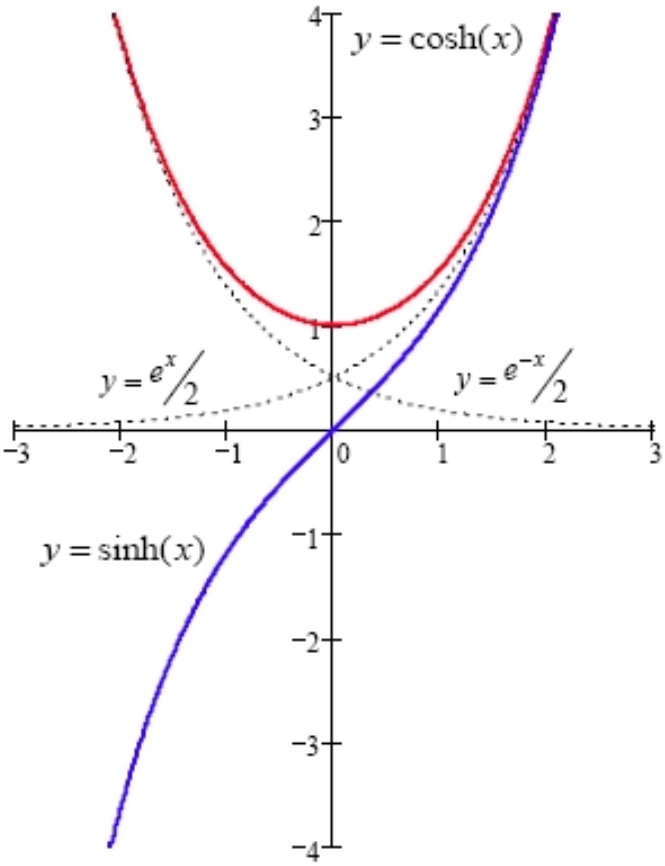

Abbildung 8: Kosinus Hyperbolicus

Additionstheoreme[11]

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\beta)\cosh(\alpha)$$

$$\sinh(\alpha-\beta) = \sinh(\alpha)\cosh(\beta) - \sinh(\beta)\cosh(\alpha)$$

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh(\beta)\cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)\sinh(\beta)$$

$$\cosh(\alpha-\beta) = \cosh(\beta)\cosh(\alpha) - \sinh(\alpha)\sinh(\beta)$$

	Kosinus Hyperbolicus
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$1 <= f(x) < +\infty$
Periodizität	keine
Monotonie	$x < 0$ streng monoton fallend, $x > 0$ streng monoton steigend
Symmetrien	Achsensymmetrisch zur y-Achse
Nullstellen	keine
Polstellen	keine
Extrema	Minimum bei $x = 0$
Wendepunkte	keine

Abbildung 9: Wichtige Eigenschaften des Kosinus Hyperbolicus.[12]

4.2 Kettenlinie

4.2.1 Randbedingungen(Integrationskonstanten)

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 beeinflussen die Position, jedoch nicht die Form der Kette. Dabei gibt C_2 die Verschiebung auf der Ordinate an, C_1 die Verschiebung auf der Abszisse.

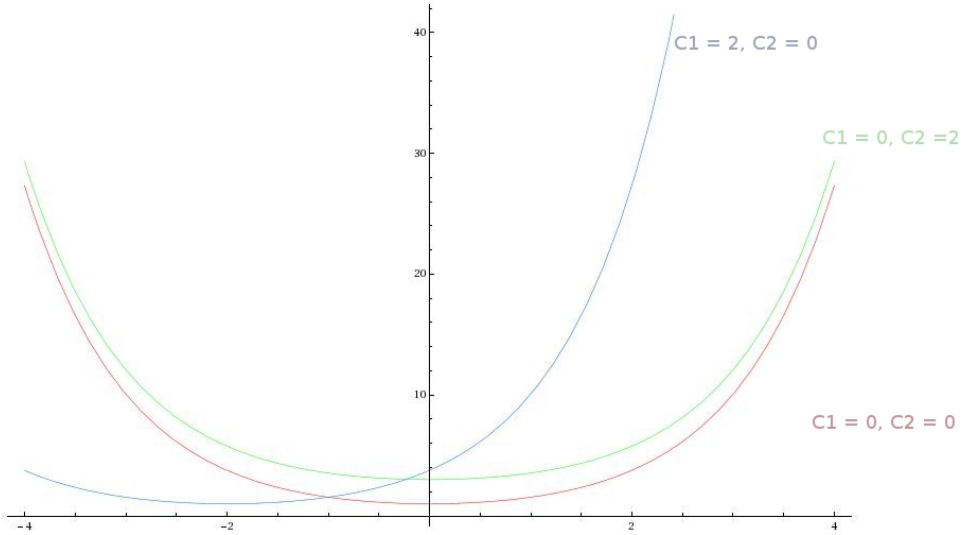

Abbildung 10: Verschiebung durch die Integrationskonstanten

Betrachtet man den Fall, dass die Aufhaengepunkte auf selber Höhe sind,

so fallen bei richtiger Wahl des Koordinatensystems die beiden Konstanten C_1 und C_2 weg und das a lässt sich relativ einfach bestimmen. Wir gehen von folgenden Randbedingungen aus:

- Tiefpunkt in $TF(x_0/y_0)$ (1)
- Horizontale Tangente im Tiefpunkt: $y'(x_0) = 0$ (2)

Somit erhalten wir aus Bedingung 2:

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{x_0}{a} + C_1\right) &= 0 \\ C_1 &= -\frac{x_0}{a} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Setzt man C_1 in die Funktion der Kettenlinie ein, so folgt aus Bedingung 1:

$$\begin{aligned} y(x_0) = a\cosh\left(\frac{x_0}{a} - \frac{x_0}{a}\right) + C_2 &= y_0 \\ C_2 &= y_0 - a \end{aligned} \tag{4.11}$$

Legt man nun den Tiefpunkt auf $x_0 = 0$ so ist $C_1 = 0$. Geht man davon aus, dass es keine horizontale Verschiebung gibt so erhält man:

$$\begin{aligned} C_2 = y_0 - a &= 0 \\ a &= y_0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2.2 Auswirkung der Konstanten a

Die Konstante a beeinflusst maßgeblich die Form der Kurve.

Betrachtet man den normal Fall, also mit Befestigungspunkten auf gleicher Höhe, so bestimmt a die Lage des größten Durchhangs. Dieser liegt bei $TF(0/a)$ (siehe Gleichung 4.12).

Um so kleiner der Wert von a um so schmäler wird die Kurve. Ein großer Wert hingegen staucht sie, macht sie flacher.

Ist der Wert von a negativ so ist die Kurve gespiegelt an der x - Achse ($TF(0/-a)$).

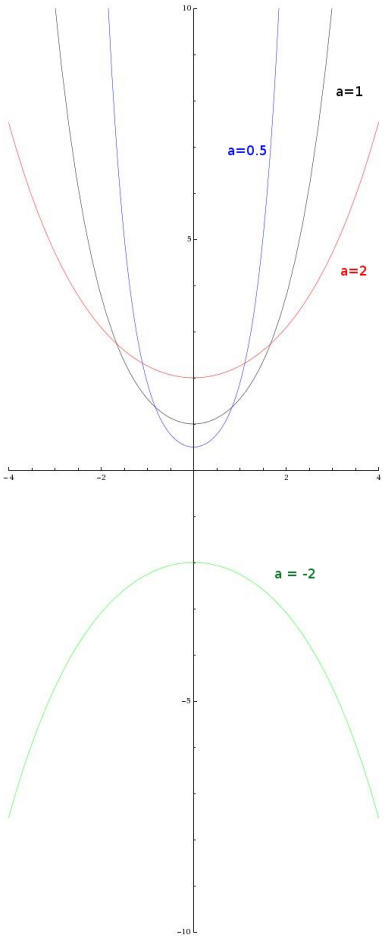

Abbildung 11: Auswirkungen von a auf die Form der Kettenlinie.

4.2.3 Welche Rolle spielt die Lage der Aufhängepunkte?

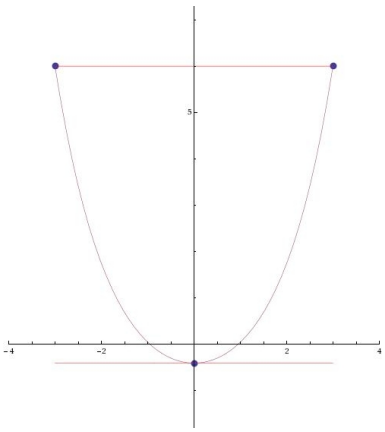

Abbildung 12: Kette mit Aufhängepunkten auf gleicher Höhe.

Bisher haben wir nur den einfachen Fall betrachtet dass die Aufhängepunkte auf selber Höhe sind. Wie verhält sich jedoch die Kette, wenn sie an zwei Punkten unterschiedlicher Höhe befestigt ist. Im ersten Fall stellt sich der Punkt mit dem stärksten Durchang genau in der Mitte der Strecke AB ein mit $y = a$. Im zweiten verschiebt sich dieser.

Der Punkt mit dem stärksten Durchhang stellt sich genau dort ein, wo die Steigung der Tangente auf der Kurve, gleich der Steigung aus der Gerade aus den beiden Aufängepunkten ist.

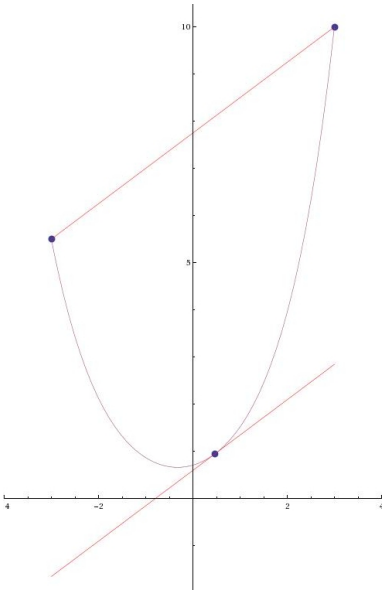

Abbildung 13: Kette mit Aufhängepunkten unterschiedlicher Höhe.

4.2.4 Bestimmung des Faktors $a = \frac{q}{h}$

Allgemein kann der Faktor a mit folgender Gleichung bestimmt werden [8]:

$$\frac{\sinh(\frac{x_B - x_A}{2a})}{\frac{x_B - x_A}{2a}} = \frac{\sqrt{L^2 - (y_b - y_A)^2}}{x_B - x_A} \tag{4.13}$$

Durch berechnen der Nullstellen (Mathematica: Findroot[expr, x0, a]) mit positiven x-Werten, erhält man die Lösung für a. Anschließen kann mit $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$, C_1 und C_2 bestimmt werden.

Da die Herleitung dieser Formel relativ komplex[5] ist, verzichten wir auf diese. Den Beweis(nach [8]) auf die Gültigkeit dieser Formel beleiben wir jedoch nicht schuldig:

Zuerst betrachten wir die Sachen die wir bereits wissen. Zum einen wissen wir wie die Länge definiert ist,

$$L = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx = \int_a^b \sinh(\frac{x-b}{a}) dx = \int_a^b \cosh(\frac{x-b}{a}) dx =$$

$$= a \sinh(\frac{x_B}{a} + C_1) - a \sinh(\frac{x_A}{a} + C_1)$$

zum anderen kennen wir die Funktionswerte an den Aufhängepunkten

$$y(x_A) = a \cosh(\frac{x_A}{a} + C_1) + C_2$$

$$y(x_B) = a \cosh(\frac{x_B}{a} + C_1) + C_2$$

Erweitert man Gleichung 4.13 so erhält man:

$$\frac{\sinh(\frac{x_B - x_A}{2a})}{2a} = \sqrt{L^2 - (y_b - y_A)^2} (\frac{x_B - x_A}{2a})^2$$

Setzt man nun L, $y(x_A)$ und $y(x_B)$ ein so erhält man für die rechte Seite der Gleichung:

$$((a \sinh(\frac{x_B}{a} + C_1) - a \sinh(\frac{x_A}{a} + C_1))^2 -$$

$$-(a \cosh(\frac{x_B}{a} + C_1) - a \cosh(\frac{x_A}{a} + C_1))^2) * (\frac{x_B - x_A}{2a})^2$$

Durch anwenden der binomischen Formel kommt man auf:

$$a^2 \sinh^2(\frac{x_B}{a} + C_1) - 2a \sinh(\frac{x_B}{a} + C_1) a \sinh(\frac{x_A}{a} + C_1) + a^2 \sinh^2(\frac{x_A}{a} + C_1) -$$

$$-(a^2\cosh^2(\frac{x_B}{a}+C_1)+2a^2\cosh(\frac{x_B}{a}+C_1)\cosh(\frac{x_A}{a}+C_1)-a^2\cosh^2(\frac{x_A}{a}+C_1))*(\frac{x_B-x_A}{2a})^2$$

Dies kann mit dem Additiontheorem $\cosh\alpha\cosh\beta-\sinh\alpha\sinh\beta=\cosh(\alpha-\beta)$ weiter vereinfacht werden:

$$(-a^2-a^2+2a^2*\cosh\frac{x_B-x_A}{a})*(\frac{x_B-x_A}{2a})^2$$

Unsere vollständige Gleichung lautet nun:

$$\frac{\sinh(\frac{x_B-x_A}{2a})}{2a}=(-a^2-a^2+2a^2*\cosh\frac{x_B-x_A}{a})*(\frac{x_B-x_A}{2a})^2$$

Auf der linken Seite wenden wir $\sinh\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\cosh(\alpha)-1}$ an, auf der rechten wird $2a^2$ ausgeklammert:

$$\frac{1}{2}(\cosh(\frac{x_B-x_A}{2a})-1)*(x_B-x_A)^2=2a^2(-1+\cosh(\frac{x_B-x_A}{a}))*\frac{(x_B-x_A)^2}{4a^2}$$

Durch Vereinfachen lässt sich die Gleichheit und somit auch die Gültigkeit der Formel erkennen:

$$\frac{1}{2}(\cosh(\frac{x_B-x_A}{2a})-1)=(-1+\cosh(\frac{x_B-x_A}{a}))*\frac{1}{2}$$

4.2.5 Welche Rolle spielt das Gewicht der Kette?

Bei der Herleitung der Differentialgleichung war das Gewicht der Kette wichtig um die Funktion zu bestimmen. Jedoch spielt das Eigengewicht der Kette für die Form die sie annimmt keine Rolle, das heißt alle Ketten mit unterschiedlichem Gewicht nehmen die selbe Form an, die Kettenlinie. Im vorherigen Abschnitt hat man bereits gesehn das eben die Konstante a die, wie bei der Herleitung gesehen, das Gewicht der Kette beinhalet, ohne gegebenes Eigengewicht der Kette zu berechnen ist. Die Konstante a ist ausschließlich von der Lage der Aufhängepunkte zueinander und der Länge des gegebenen Seils abhängig (siehe Gleichung 4.13).

Praktischer Beweis wurde im Vortrag vorgeführt.

4.2.6 Annäherung durch Taylor Reihe

Die Kettenlinie lässt sich mit der Taylor Reihe annähern:

$$cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 n}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ...$$

Nähert man die Kettenlinie nur mit den ersten beiden Gliedern der Reihe($p(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$) an so sieht man, dass die Funktionen für kleine x - Werte schon (fast) die gleichen Werte annehmen. Somit war die Vermutung von Galileo gar nicht mal so schlecht, falsch war sie trotzdem.

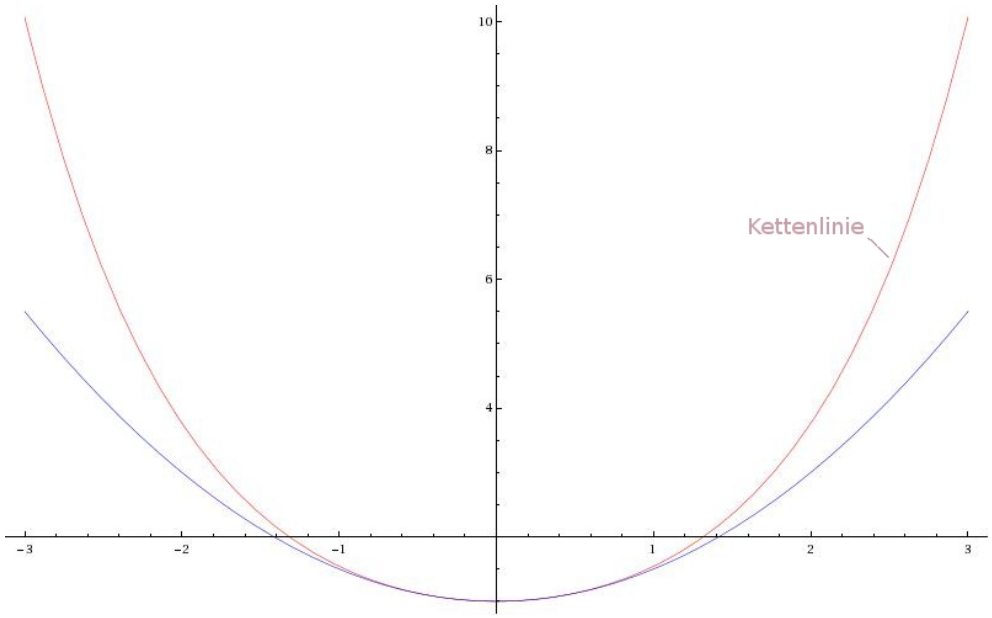

Abbildung 14: Kettenlinie angenähert mit den ersten beiden Gliedern der Taylorreihe.

5 Parbale vs Kettenlinie

Galileo vermutete, dass die Kurve einer hängenden Kette druch eine Parabel beschreibbar ist. Grund genug für uns sich die Parbel etwas genauer anzuschauen.

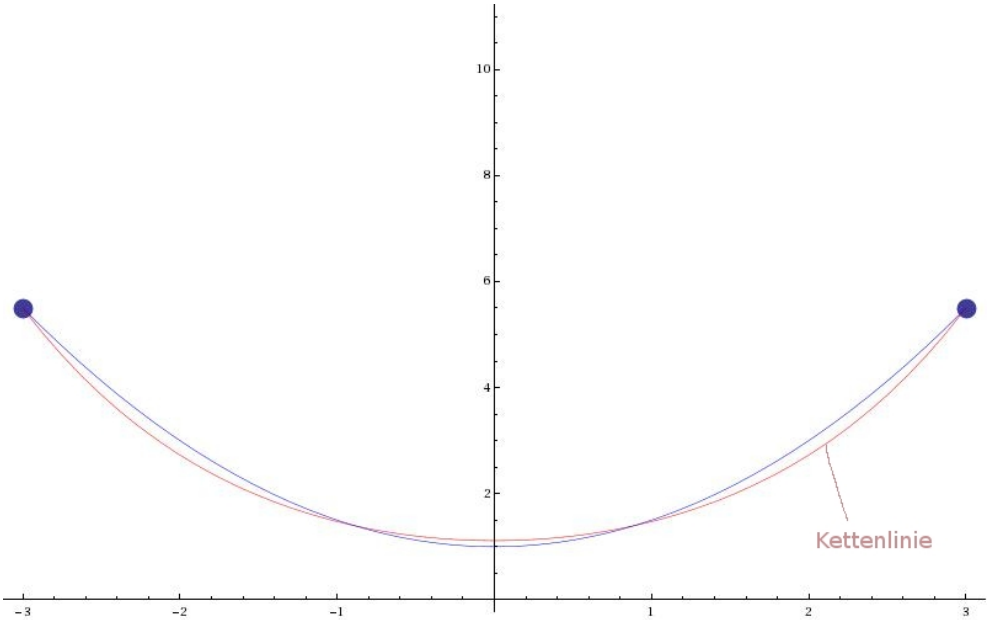

Abbildung 15: Kette und Parabel mit gleicher Bogenlänger und gleichen Befestigunspunkten.

Die Grafik zeigt ,rot, die Ketteblinie und , blau, die Parabel beide gleicher Bogenlänge und mit gleichen Aufhängepunkten. Man sieht deutlich, dass sie einen unterschiedlichen Kurvenverlauf annehmen. Die Parabel hängt etwas stärker durch, ist dafür schmäler. Die Form der Kette wirkt harmonischer, sie ist nicht so spitz und etwas bereiter.

5.1 Beweis: Kettenlinie ist keine Parabel!

Der Unterschied zwischen Parabel und Kette ist nun klar, hier nun der mathematische Beweis: Zuerst betrachten wir die Funktion der Kette:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}$$

mit $V = s(x) * q$ ergibt sich:

$$y'(x) = \frac{q}{H} * s(x)$$

q und H sind konstanten, somit koennen diese zusammengefasst werden: $c = \frac{q}{H}$
Somit erhält man als Gleichung der Kettenlinie:

$$y'(x) = s(x) * c$$

Eine beliebige Parabel ist definiert durch:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

Somit ist die Steigung im Punkt x definiert durch:

$$y'(x) = 2a * x + b$$

Wir nehmen nun an dass die Kettenlinie eine Parabel ist und wollen durch Widerspruch beweisen dass es eben nicht so ist. Somit muss, falls die Kette durch eine Parabel definiert ist, gelten:

$$s(x) * c = 2a * x + b$$

$2a$ ist wiederum konstant, der Einfachheit halber substituieren wir $a_1 = 2a$:

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx * c = a_1 x + b$$

Um das stöhrende Integral zu eliminieren Leiten wir auf beiden Seiten ab:

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} * c = a_1$$

Da uns die Funktion der Kette interessiert stellen wir nach $y'(x)$ um:

$$1 + y'(x)^2 * c^2 = a_1^2$$

$$y'(x)^2 = \frac{a_1^2 - 1}{c^2}$$

$$y'(x) = \sqrt{\frac{a_1^2 - 1}{c^2}}$$

Unter der Wurzel stehen nur Konstanten welche zu einer einzigen zusammengefasst werden $a_{11} = \sqrt{\frac{a_r^2-1}{c^2}}$:

$$y'(x) = a_{11}$$

Bildet man nun die Stammfunktion so erhält man:

$$y(x) = a_{11}x + c$$

Somit hat sich die Vermutung, dass die Kettenlinie durch eine Parabel beschrieben wird nicht bestätigt:

$$ax^2 + bx + c \; ! = a_{11}x + c$$

5.2 Seil unter konstanter Linienlast

Abbildung 16: Seil unter konstanter Linienlast, Beispiel Golden Gate Bridge.

Wir wissen bereits, dass die Form der Kette nicht durch eine Parabel beschrieben werden kann. Es gibt jedoch auch den Fall das ein hängendes Seil die Form einer Parbel annimmt. Das tritt ein wenn das Seil durch eine konstante Linienlast beansprucht wird. Ein Beispiel ist eine Hängebrücke dessen Fahrbahn in gleichmäßigen Abständen an dem tragenden Seil befestigt ist.

Da die befestigte Last im Vergleich zum Eigengewicht riesig ist kann dieses vernachlässigt werden. Dadurch ist die Vertikalkraft nicht mehr von der Länge des betrachteten Stücks abhängig sondern ausschließlich von der Last die getragen wird.

$$dV = q * dx$$

Erinnern wir uns zurück an die Kräftebeziehungen:

$$y''(x) = \frac{1}{H} * V'(x)$$

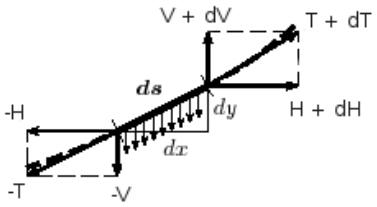

Abbildung 17: Belastung durch das Eigengewicht.

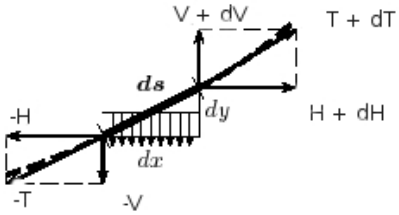

Abbildung 18: Belastung durch eine konstante Linielast(Eigengewicht vernachlässigt).

Setzt man nun die Verikalkraft in die Gleichung ein so bekommt man die 2.Ableitung einer Parabel:

$$y''(x) = \frac{q}{H} * \frac{dx}{dx}$$

$$y''(x) = \frac{q}{H} = a$$

Durch zweimalige Integration bekommt man die Funktion die die Form des Seils beschreibt.

$$y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$$

[9]

6 Anwendungsbeispiele

In der Technik wird meist auf die Parabel zurück gegriffen, da beispielsweise Seile, Bögen und Brücken meist belastet werden und daher die Parabel eine wesentlich stabielere Form bietet.

6.1 Brücken

Bei diesem Beispiel, der Rokko Island Brcke, gilt das Gleiche wie in 5.2, mit dem Unterschied, dass hier ein Bogen belastet wird.

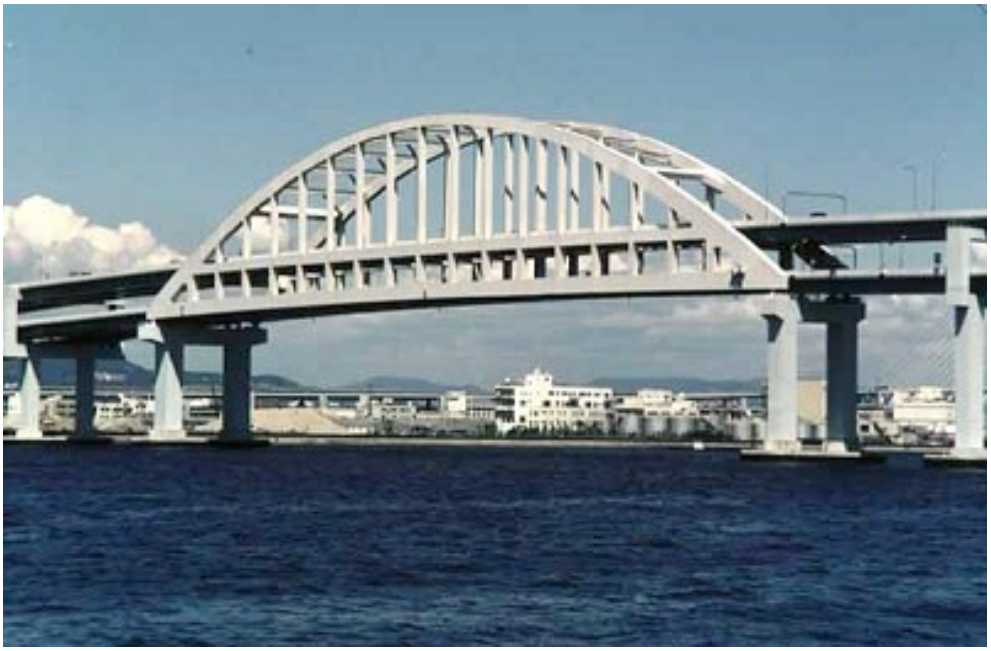

Abbildung 19: Rokko Island Bridge, getragen von einem Parabelförmigen Bogen.

6.2 Bögen

Der Bogen aus St.Louis ist ein Kunstwerk dessen Form der Kettelinie angenähert ist.

Abbildung 20: Gateway Arch in St. Louis (Missouri)

6.3 Hochspannungsleitungen

Hochspannungsleitungen bilden die Form der Kettenlinie. Die Leitungen werden im ideal Fall ausschließlich durch ihr Eigengewicht belastet. Natürlich müssen auch weitere Faktoren wie Ausdehnung des Seils bei Temperaturänderung oder Eisablagerungen, berücksichtigt werden. [10]

Abbildung 21: Hochspannungsleitungen nehmen die Form der Kettenlinie an.

Literatur

[1] Prof. Dr. Marcel Erne: Catenaria, Leibniz und die Kettenlinie, http://www.uni-hannover.de/ imperia/ md/ content/ pressestelle/ uni-magazin/ 06_3-4/14_erne.pdf

[2] Mathpedia: Differentialgleichung, http://www.mathepedia.de/ Differentialgleichungen.aspx

[3] Uni-Bielefeld: Differentialgleichung, http://www.math.uni-bielefeld.de/ KMathF/ math/ dgl/

[4] Dr.-Ing.K.-H. Gröbel: Technische Mechanik, verhürzter Grundkurs über 2 Semester: Statik, Vergl. Kapitel 4, S.58-69, http://www.uni-magdeburg.de/ifme/l-dynamik/groebel-statik.pdf

[5] WikiBooks: Fortan: Anhang B: Kettenlinie: Seilstatik, http://de.wikibooks.org/wiki/Fortran:_Anhang_B:_Kettenlinie:_Seilstatik

[6] Hans-Jürgen, Matheplanet: Die Kettenlinie als Minimalproblem, http://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=506&ref=http

[7] Prof. Dr. R. Grothmann: Die Kettenlinie, http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/Projekte/Kettenlinie/index.html

[8] Andreas Lindner: Die Kettenlinie - dynamisch betrachtet, S.4-5, http://teacher.eduhi.at/alindner/Sites/Artikel/Kettenlinie-Arikel.pdf

[9] Jürgen und Helga Dankert: Technische Mechanik, 3.Auflage, Teubner, 2004, Vgl. Kap. 11, S.143-152

[10] Univ.-Prof. Dr.-Ing. Martin Schanz, Mechanik B1 - Statik, Vergl. Kapitel 6.3, S.72-78, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Martin Schanz

[11] Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch

[12] Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_Hyperbolicus

LaTeX